Решение задач на тему «Представление чисел в компьютере»

Типы задач:

1. Целые числа. Представление чисел в формате с фиксированной запятой.
2. Дробные числа. Представление чисел в формате с плавающей запятой.
3. Арифметические операции с числами в формате с плавающей запятой.

Целые числа. Представление чисел в формате с фиксированной запятой

Методические рекомендации:

В задачах такого типа используются понятия:

- Фиксированная запятая или фиксированная точка.
- Машинное слово
- Прямой код
- Дополнительный код
- Обратный код

Фиксированная запятая

Целые числа в компьютере хранятся в памяти в формате *с фиксированной запятой или фиксированной точкой.* В этом случае каждому разряду ячейки памяти соответствует всегда один и тот же разряд числа, а запятая находится справа после младшего разряда, т.е. вне разрядной сетки.

Машинное слово.

Множество целых чисел, представимых в памяти ЭВМ ограничено и зависит от размера ячеек памяти (машинного слова), используемых для их хранения. В k-разрядной ячейке может храниться 2^k различных значений целых чисел.

Представление целых положительных чисел.

Алгоритм № 1 получения внутреннего представления целого положительного числа N, хранящегося в k разрядном машинном слове:

1. Перевести число N в двоичную систему счисления.
2. Полученный результат дополнить слева незначащими нулями до k разрядов

Прямой код.

Для хранения *целых неотрицательных чисел* отводится одна ячейка памяти (8 бит).

Для хранения *целых чисел со знаком* отводится две ячейки памяти (16 бит), причем старший (левый) разряд отводится под знак числа (если число положительное, то в знаковый разряд записывается 0, если число отрицательное записывается 1).

Представление в компьютере положительных чисел с использованием формата «знак-величина» называется **прямым кодом** числа.

Дополнительный код. Обратный код

Для представления отрицательных чисел используется *дополнительный код*. Дополнительный код позволяет заменить арифметическую операцию вычитания операцией сложения, что существенно упрощает работу процессора и увеличивает его быстродействие.

Алгоритм № 2 получения внутреннего представления целого отрицательного числа N, хранящегося в k разрядном машинном слове:

1. Получить внутреннее представление положительного числа *N* (Перевести число N в двоичную систему счисления, полученный результат дополнить слева незначащими нулями до k разрядов)
2. Получить *обратный код* этого числа заменой 0 на 1 и 1 на 0, т.е значения всех бит инвентировать.
3. К полученному числу прибавить 1.

Данная форма называется **дополнительным кодом**

Алгоритм № 3 перевода дополнительного кода в десятичное число.

1. Инвертировать дополнительный код
2. Прибавить к полученному коду 1 и получить модуль отрицательного числа:
3. Перевести в десятичное число и приписать знак отрицательного числа.

Задачи. Уровень «3»

1. *Компьютер работает только с целыми положительными числами. Каков диапазон изменения чисел, если для представления числа в памяти компьютера отводится 1 байт?*

Решение:
Диапазон значений от 0 до 2^8 -1=255

Ответ: от 0 до 255.

2. *Каков диапазон изменения целых чисел (положительных и отрицательных), если в памяти компьютера для представления целого числа отводится 1 байт.*

Решение:
В диапазоне целых положительных чисел всего 256 чисел, если в памяти компьютера для них отводится 1 байт.
Диапазон значений положительных и отрицательных чисел в равном количестве рассчитаем так: 256:2= 128. Минимальное отрицательное число равно –128. Так как число 0 также входит в этот диапазон, то максимальное положительное число будет равно 127 (от -2^{k-1} до $2^{k-1}-1$, действительно, так как $2^k:2=2^{k-1}$).

Ответ: от –128 до 127.

3. *Пусть для представления целых чисел в компьютере используется 16-разрядная ячейка (2 байта). Определить каков диапазон хранимых чисел, если:*

а) используются только положительные числа;

б) используются как положительные, так и отрицательные числа в равном количестве.

Решение:
Всего в 16-разрядной сетке может храниться 2^{16} =65536 значений. Следовательно:
а) диапазон значений только положительных чисел от 0 до 65535 (от 0 до 2^k-1, 1 отняли, так как одно значение пошло на кодировку числа 0);
б) диапазон значений положительных и отрицательных чисел в равном количестве рассчитаем так: 65536:2= 32768. Минимальное отрицательное число равно –32768. Так как число 0 также входит в этот диапазон, то максимальное положительное число будет равно 32767 (от -2^{k-1} до $2^{k-1}-1$, действительно, так как $2^k:2=2^{k-1}$).

Ответ: а) от 0 до 65535; б) от –32768 до 32767.

4. *Заполнить таблицу, записав максимальные и минимальные значения чисел в заданном компьютерном представлении:*

Компьютерное представление	*Максимальное значение*	*Минимальное значение*
целые неотрицательные числа		
целые числа со знаком		
большое целое число со знаком		

Решение:

Для хранения *целых неотрицательных чисел* отводится одна ячейка памяти (8 бит). Минимальное значение – все разряды заполнены 0, это будет число 0, максимальное значение – восемь единиц, или десятичное число 255.

Для хранения *целых чисел со знаком* отводится две ячейки памяти (16 бит), причем старший (левый) разряд отводится под знак числа (если число положительное, то в знаковый разряд записывается 0, если число отрицательное записывается 1). Следовательно, максимальное значение целых чисел со знаком $2^{15} – 1 = 32767$ (один разряд на знак и 1 на кодирование 0), а минимальное $–2^{15} = –32768$.

Для хранения больших целых чисел со знаком отводится 4 ячейки памяти-32 бита. Значит,

максимальное значение большого целого числа со знаком $2^{31} – 1 = 2147483647$, минимальное значение $–2^{31} = –2147483648$

Ответ:

Компьютерное представление	Максимальное значение	Минимальное значение
целые неотрицательные числа	$2^8 – 1 = 255$	0
целые числа со знаком	$2^{15} – 1 = 32767$	$–2^{15} = –32768$
большое целое число со знаком	$2^{31} – 1 = 2147483647$	$–2^{31} = –2147483648$

5. *Компьютер работает только с целыми положительными числами. Каков диапазон изменения чисел, если для представления числа в памяти компьютера отводится 4 байта?*

Решение:

Если компьютер работает только с целыми положительными числами, то разряд на знак выделять не надо. Диапазон чисел лежит от 0 до $2^{32}-1$, так как 4 байта – 32 бит.

Ответ: от 0 до $2^{32}-1$ или от 0 до 4 294 967 295

6. *Каков диапазон изменения целых чисел (положительных и отрицательных), если в памяти компьютера для представления целого числа отводится 4 байта?*

Решение:
Для хранения больших целых чисел со знаком отводится 4 ячейки памяти – 32 бита. Значит, максимальное значение целого числа со знаком $2^{31}-1 = 2147483647$, минимальное значение $-2^{31} = -2147483648$

Ответ: от –2147483648 до 2147483647

7. *Получить внутреннее представление целого числа 1607 в 2-х байтовой ячейке. Записать ответ в 16-ричной форме.*

Решение:

Воспользуемся алгоритмом №1
$1607_{10} = 11001000111_2$
Внутреннее представление этого числа: 0000 0110 0100 0111
16-ричная форма 0647.

Ответ: 0000 0110 0100 0111 или 0647

8. *Записать дополнительный код отрицательного числа –2002 для 16-ти разрядного компьютерного представления с использованием алгоритма.*

Решение:

Воспользуемся алгоритмом №2

Прямой код	$\lvert -2002_{10} \rvert$	0000011111010010_2
Обратный код	инвертирование	1111100000101101_2
	прибавление единицы	$\begin{array}{r} 1111100000101101_2 \\ + \; 0000000000000001_2 \end{array}$
Дополнительный код		1111100000101110_2

Ответ: 1111100000101110_2

9. *Заполнить таблицу, записав десятичные числа в заданном компьютерном представлении:*

Десятичные числа	*Компьютерное представление*	
	целые неотрицательные числа	*целые числа со знаком*
255		
-255		
32768		
-32768		

Решение:

Так как для хранения *целых неотрицательных чисел* отводится одна ячейка памяти (8 бит), то в компьютерном представлении максимальное целое неотрицательное число это десятичное число 255. а двоичное 11111111. Значит компьютерное представление чисел, больших 255, и отрицательных, как целых неотрицательных отсутствует.

Для хранения *целых чисел со знаком* отводится две ячейки памяти (16 бит), причем старший (левый) разряд отводится под знак числа (если число положительное, то в знаковый разряд записывается 0, если число отрицательное записывается 1). Так как максимальное положительное число, которое может храниться в памяти в формате *целое число со знаком* равно 2^{15} –1 =32767, то представление числа 32768 в таком формате отсутствует. Минимальное отрицательное число, записанное в таком формате десятичное –32768, двоичное 1000 0000 0000 0000. Число –255 представлено в дополнительном коде.

Ответ:

Десятичные числа	Компьютерное представление	
	целые неотрицательные числа	целые числа со знаком
255	11111111	0000000011111111
-255	отсутствует	1111111100000001
32768	отсутствует	отсутствует
-32768	отсутствует	1000000000000000

10. *Выполнить арифметические действия 3 – 10 (числа записаны в 10-с.с.) в 16 разрядном компьютерном представлении.*

Решение:

$$
\begin{array}{r} +3 \\ -10 \\ \hline -7 \end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl} +\ 00000011 & \\ 11110110 & \text{– доп. код числа –10} \\ \hline 11111001 & \text{–доп.код числа –7} \end{array}
$$

Задачи. Уровень «4»

Решение задач на основе применения определения дополнительного кода.
Определение. Дополнительный код отрицательного числа А, хранящегося в n ячейках, равен

$$2^n - |A|$$

11. *Записать дополнительный код отрицательного числа –2002 для 16-разрядного компьютерного представления.*

Решение:

Проведем вычисления в соответствии с определением дополнительного кода, где n=16:

2^{16}	=	10000000000000000_2	65536_{10}
2002_{10}	=	0000011111010010_2	2002_{10}
$2^{16} - \|2002_{10}\|$	=	1111100000101110_2	63534_{10}

Проведем проверку с использованием десятичной системы счисления. Дополнительный код 63534_{10} в сумме с модулем отрицательного числа 2002_{10} равен 65536_{10}, т.е. дополнительный код дополняет модуль отрицательного числа до 2^{16} .

Ответ: 1111100000101110_2

12. *Заполнить таблицу, записав отрицательные десятичные числа в прямом, обратном и дополнительном кодах в 16-ти разрядном представлении:*

Десятичные числа	*Прямой код*	*Обратный код*	*Дополнительный код*
-10			
-100			
-1000			
-10000			

Решение:
–10
Прямой код:
10 :2=5 (остаток 0):2=2 (остаток 1):2=1 (остаток 0)
$10_{10} = 1010_2$
Прямой код 0000000000001010.
Обратный код 1111111111110101.
Дополнительный код получаем добавлением к обратному числа 1:
1111111111110110

–100

Прямой код:

$100_{10} = 1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^2 = 64+32+4 = 1100100_2$

Прямой, обратный и дополнительный код находим аналогично.

–1000

$1000_{10} = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 = 512+256+128+64+32+8 = 1111101000$

Прямой, обратный и дополнительный код находим аналогично.

–10000

Так как $2^{16} = 65536$, а $2^{15} = 32768$, $2^{14} = 16384$, то в разложении числа 10000 наивысшая степень двойки число 13.

$10000_{10} = 2^{13} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^4 = 8192+1024+512+256+16 = 10011100010000$

Ответ:

Десятичные числа	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
–10	0000000000001010	1111111111110101	1111111111110110
–100	0000000001100100	1111111110011011	1111111110011100
–1000	0000001111101000	1111110000010111	1111110000011000
–10000	0010011100010000	1101100011101111	1101100011110000

13. *Записать в двоичной и 16-ричной форме внутреннее представление наибольшего положительного целого и наибольшего по абсолютной величине отрицательного целого числа, представленных в 1-байтовой ячейке памяти.*

Решение:

1. Так как в компьютере могут быть представлены как положительные, так и отрицательные числа в однобайтовой ячейке памяти, то всего таких чисел будет 256. (2^8). Наибольшее положительное число, представленное в однобайтовой ячейке памяти (с учетом крайнего правого разряда на знак) $2^7 - 1 = 127_{10} = 01111111_2 = 7F_{16}$

2. Наибольшее по абсолютной величине отрицательное целое число, представленное в 1-байтовой ячейке памяти число $128_{10} = 1000\ 0000_2 = 80_{16}$

Ответ: $01111111_2 = 7F_{16}$ и $1000\ 0000_2 = 80_{16}$

14. *Записать в двоичной и шестнадцатеричной форме внутреннее представление наибольшего положительного целого и наибольшего по абсолютной величине отрицательного целого числа, представленных в двубайтовой ячейке памяти.*

Решение:

1. Так как в компьютере могут быть представлены как положительные, так и отрицательные числа в *2-байтовой* ячейке памяти, то всего таких чисел будет 2^{16}.

Наибольшее положительное число, представленное в 2-байтовой ячейке памяти (с учетом крайнего левого разряда на знак) $2^{15} - 1 = 32767_{10} =$ $= 0\ 111111111111111_2 = 7FFF_{16}$

2. Наибольшее по абсолютной величине отрицательное целое число, представленное в 2-байтовой ячейке памяти, является минимальным отрицательным числом, записанным в таком формате: $-32768_{10} = 1000\ 0000\ 0000\ 0000_2 = 8000_{16}$

Ответ: $7FFF_{16}$, 8000_{16}

15. *Получить десятичное представление числа по его дополнительному коду* 10010111_2

Решение:

1). Инвертируем дополнительный код 10010111_2.
Получим 01101000 – обратный код

2). Прибавим к полученному числу 1. Получим число 01101001

3). Переведем полученную запись числа из двоичной в 10-ю форму. Получим число 105.

4). Перед полученным числом поставим знак «–»

Ответ: –105

16. *Получить дополнительный код десятичного числа –105.*

Решение:

1). Модуль числа записать в прямом коде в n двоичных разрядах.
$105 = 01101001_2$

2). Получить обратный код числа. Получим 10010110

3). К полученному обратному коду прибавить 1. Получим 10010111

Ответ: дополнительный код числа –105 равен 10010111

Задачи. Уровень «5»

Используются алгоритмы №1, 2, 3.

17. *Выполнить арифметическое действие $3000_{10} – 5000_{10}$ в 16-ти разрядном компьютерном представлении.*

Решение:
Представим положительное число в прямом, а отрицательное число в дополнительном коде:

Деся-тичное число	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
3000	0000101110111000		
–5000	0001001110001000	1110110001110111	1110110001110111 +0000000000000001 1110110001111000

Сложим прямой код положительного числа с дополнительным кодом отрицательного числа. Получим результат в дополнительном коде:

3000–5000			1111100000110000

Переведем полученный дополнительный код в десятичное число, воспользуемся алгоритмом №3:

1). Инвертируем дополнительный код: 0000011111001111
2). Прибавим к полученному коду 1 и получим модуль отрицательного числа:

```
  0000011111001111
+ 0000000000000001
  0000011111010000
```

3). Переведем в десятичное число и припишем знак отрицательного числа: –2000.

Ответ: 0000011111010000

18. *Назовите достоинства и недостатки представления чисел в формате с фиксированной запятой.*

Решение:
Достоинства:
- Простота
- Наглядность представления чисел

- Благодаря использованию дополнительного кода вычитание сводится к сложению, что упрощает алгоритм реализации арифметических операций.

Недостатки:

Конечный диапазон представления величин недостаточен для решения математических, физических, экономических и других задач, где используются очень малые и очень большие числа.

19. *Выполнить арифметическое действие $20_{10} - 60_{10}$ в 16-ти разрядном компьютерном представлении.*

Решение:

1. Представим положительное число в прямом, а отрицательное число в дополнительном коде:

Десятичное число	Прямой код	Обратный код	Дополнительный код
20	0000000000010100		
–60	0000000000111100	1111111111000011	1111111111000011 +0000000000000001 1111111111000100

2. Сложим прямой код положительного числа с дополнительным кодом отрицательного числа. Получим результат в дополнительном коде:

20–60			1111111111011000

3. Проверка: Переведем полученный дополнительный код в десятичное число:

1). Инвертируем дополнительный код: 0000000000100111

2). Прибавим к полученному коду 1 и получим модуль отрицательного числа:

$$\begin{array}{r} 0000000000100111 \\ {}^{+}\,0000000000000001 \\ \hline 0000000000101000 \end{array}$$

3). Переведем в десятичное число $101000_2 = 2^5 + 2^3 = 32+8 = 40_{10}$ и припишем знак отрицательного числа: –40. Действительно: 20–60 = –40

Ответ: 1111111111011000

Дробные числа. Представление чисел в формате с плавающей запятой.

Методические рекомендации:

В задачах такого типа используются понятия:

- Плавающая запятая или точка
- Экспоненциальная форма числа
- Мантисса
- Порядок числа
- Нормализованная форма числа
- Обычная точность
- Двойная точность

Плавающая запятая или плавающая точка - положение запятой в записи числа может изменяться. Пример: $555{,}55 = 55555 \cdot 10^{-2} = 0{,}55555 \cdot 10^{3}$

Любое число А может быть представлено в экспоненциальной форме:

$A = m \cdot q^{n}$, где
m – мантисса числа,
q – основание системы счисления,n – порядок числа.

Пример: $0{,}55555 \cdot 10^{3}$
Нормализованная форма числа.
Чтобы привести к какому-то стандарту в представлении чисел с плавающей запятой условились представлять числа в нормализованной форме.
При этом *мантисса отвечает условию:* она должна быть правильной дробью и иметь после запятой цифру, отличную от нуля.
$1/n \le | m | < 1$

Пример:555,55 – естественная форма
$0{,}55555 \cdot 10^{3}$ – нормализованная форма
$0{,}55555 > 1/3 \approx 0{,}3333\ldots$
$0{,}55555 < 1$
Это касается и отрицательных чисел, т.к. мантисса в условии взята по модулю.
Дробные числа занимают в памяти 4 байта (обычная точность) или 8 байтов (двойная точность).
Для записи таких чисел выделяются разряды для хранения:

- знака мантиссы,
- знака порядка,
- порядка числа
- мантиссы.

1-й байт *2-й байт* *3-й байт* *4-й байт*

± порядок ЗНАК И М А Н Т И С С А

- в старшем бите 1-го байта хранится знак порядка числа
  - *0 – означает плюс, 1 – минус;*
  - 7 бит 1 байта содержат порядок;
- в следующих трех байтах, хранятся значащие цифры мантиссы и её знака (24 разряда).

Задачи. Уровень «3»

20. *Для представления вещественного числа отводится 8 байт. Порядок занимает 11 бит. Сколько значащих цифр будет содержать двоичная мантисса?*

Решение:
Число занимает 64 разряда, из них 11 разрядов на машинный порядок, значит, на знак числа и мантиссу отводится 64–11 =53 бит, на мантиссу 52 бита

Ответ: 52 бита.

21. *Записать следующие числа в форме с плавающей запятой и нормализованной мантиссой:*

а) $217{,}934_{10}$; б) 75321_{10}; в) $10{,}0101_{10}$; г) 200450_{10}

Решение:
а). $217{,}934_{10} = 0{,}217934 \cdot 10^3$, где 0,217934 –нормализованная мантисса, порядок –3
б). $75321_{10} = 0{,}75321 \cdot 10^5$, где 0,75321 – нормализованная мантисса, порядок –5
в). $10{,}0101_{10} = 0{,}\ 100101 \cdot 10^2$, где 0,100101 – нормализованная мантисса, порядок –2
г). $200450_{10} = 0{,}200450 \cdot 10^6$, где 0,200450 – нормализованная мантисса, порядок –6

22. *Приведенные ниже числа распределите в два столбика: в первый поместите числа в естественной форме представления, во второй – в экспоненциальной.*

0,1236, 123,6258; 123628×10^5; $-12{,}365 \times 10^{-9}$; $0{,}110011 \times 2^{100}$;
1,000001; –1111111; 1111111×2^{-11}; 9999,9999; -1221×10^{-5}

Решение:

Числа в естественной форме	Числа в экспоненциальной форме
0,1236	-1221×10^{-5}
123,6258	123628×10^5
1,000001	$-12{,}365 \times 10^{-9}$
–1111111	$0{,}110011 \times 2^{100}$
9999,9999	1111111×2^{-11}

23. *Запишите число 2001,2001 пятью различными способами в форме с плавающей запятой.*

Решение:

Возможны такие варианты записи:
$2{,}0012001 \times 10^{3}$;
$20{,}012001 \times 10^{2}$;
$200{,}12001 \times 10^{1}$;
$20012{,}001 \times 10^{-1}$;
$200120{,}01 \times 10^{-2}$.

24. *Запишите следующие числа в естественной форме:*

а). $0{,}380456 \times 10^{2}$;
б). $0{,}200000 \times 10^{-5}$;
в) .1100000E–5;
г) .7892101E+5.

Решение:
а) 38,0456; б) 0,000002; в) 0,0000011; г) 78921,01.

Задачи. Уровень «4»

25. *Сравните следующие числа:*

а) $318{,}4785 \times 10^{9}$ и $3{,}184785 \times 10^{11}$;

б) $218{,}4785 \times 10^{-3}$ и $1847{,}85 \times 10^{-4}$;

в) $0{,}1101 \times 2^{10}$ и 101×2^{-11};

г) 11011×2^{-100} и $1{,}1101 \times 10^{-1}$.

Решение:

а) $318{,}4785 \times 10^{9} = 3{,}184785 \times 10^{11}$;

б) $218{,}4785 \times 10^{-3} > 1847{,}85 \times 10^{-4}$;

в) $0{,}1101 \times 2^{10} > 101 \times 2^{-11}$; ($11{,}01 > 0{,}101$, т.к. $10_2 = 2_{10}$; $-11_2 = -3_{10}$)

г) $11011 \times 2^{-100} > 1{,}1101 \times 10^{-1}$ ($1{,}1011 > 0{,}11101$, т.к. $-100_2 = -4_{10}$)

Задачи. Уровень «5»

Для решения задач можно использовать инженерный калькулятор.
Использовать дополнительный теоретический материал.

Рассматриваются понятия:

- **Машинный порядок.**

Для примера рассмотрим внутреннее представление вещественного числа в 4-х байтовой ячейке памяти.
В ячейке должна содержаться следующая информация о числе: знак числа, порядок и значащие цифры мантиссы.

± маш.порядок	М А	Н Т И С	С А
1-й байт	2-й байт	3-й байт	4-й байт

В старшем бите 1-го байта хранится знак числа: 0 обозначает плюс, 1 – минус. Оставшиеся 7 бит первого байта содержат машинный порядок. В следующих трех байтах хранятся значащие цифры мантиссы (24 разряда).
В семи двоичных разрядах помещаются двоичные числа в диапазоне от 0000000 до 1111111. Значит, машинный порядок изменяется в диапазоне от 0 до 127 (в десятичной системе счисления). Всего 128 значений. Порядок (в математическом понимании), очевидно, может быть как положительным, так и отрицательным. Разумно эти 128 значений разделить поровну между положительными и отрицательными значениями порядка: от –64 до 63.
Машинный порядок смещен относительно математического и имеет только положительные значения. Смещение выбирается так, чтобы минимальному математическому значению порядка соответствовал нуль.
Связь между машинным порядком (Мр) и математическим (р) в рассматриваемом случае выражается формулой: Мр = р + 64.
Полученная формула записана в десятичной системе. В двоичной системе формула имеет вид: $Мр_2 = р_2 + 100\ 0000_2$.

- **Внутреннее представление вещественного числа.**

Алгоритм записи внутреннего представления вещественного числа:

1). перевести модуль данного числа в двоичную систему счисления с 24 значащими цифрами;
2). нормализовать двоичное число;
3). найти машинный порядок в двоичной системе счисления;
4). учитывая знак числа, выписать его представление в 4-х байтовом машинном слове.

- Формула для вычисления количества вещественных чисел, точно представимых в памяти компьютера:

$$N = 2^t \times (U - L + 1) + 1.$$

Здесь

t – количество двоичных разрядов мантиссы;

U – максимальное значение математического порядка;

L – минимальное значение порядка.

Для рассмотренного нами варианта ($t = 24$, $U = 63$, $L = -64$). Получается количество вещественных чисел, представимых в памяти компьютера с обычной точностью

$N = 2\,146\,683\,548$.

26. *Определить максимальное число и его точность для формата чисел обычной точности, если для хранения порядка и его знака отводится 8 разрядов, а для хранения мантиссы и ее знака 24 разряда.*

Решение:

Для формата чисел обычной точности выделяется 4 байт или 32 бит.

0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
знак и порядок								знак и мантисса																							

Максимальное значение порядка числа составит $1111111_2 = 127_{10}$, и, следовательно, максимальное значение числа составит:

$2^{127} = 1{,}7014118346046923173168730371588\times10^{38}$

Точность вычислений определяется количеством разрядов, отведенных для хранения мантиссы чисел. 32–8=24 бит на знак мантиссы и мантиссу. Максимальное значение положительной мантиссы равно:

$2^{23} - 1 \approx 2^{23} = 2^{(10\times2{,}3)} \approx 1000^{2{,}3} = 10^{(3\times2{,}3)} \approx 10^{7}$

Таким образом, максимальное значение *чисел обычной точности* с учетом возможной точности вычислений составит $1{,}701411\times10^{38}$ (количество значащих цифр десятичного числа в данном случае ограничено 7 разрядами).

Ответ: $1{,}701411\times10^{38}$

27. *Определите максимальное число и его точность для формата чисел двойной точности, если для хранения порядка и его знака отводится 11 разрядов, а для хранения мантиссы и ее знака 53 разряда.*

Так как на хранение порядка и его знака отводится 11 разрядов, то на один порядок отводится 10 разрядов. Тогда максимальное значение порядка $1111111111_2 = 1023_{10}$

Следовательно, максимальное значение числа составит $2^{1023} = 8{,}988465674311579538646525953945$*

Точность вычислений определяется количеством разрядов, отведенных для хранения мантиссы чисел.

Так как для хранения мантиссы и ее знака отводится 53 разряда, то на саму мантиссу отводится 52 знака и максимальное значение положительной мантиссы равно

$2^{52}-1 \approx 2^{52} = 2^{(10\times5.2)} \approx (2^{10})^{5,2} \approx 1000^{5,2} = 10^{(3\times5,2)} = 10^{15,6}$

Максимальное значение числа двойной точностью с учетом возможной точности вычислений составит $8,98846567431157\times10^{307}$ (количество значащих цифр десятичного числа в данном случае ограничено 15–16 разрядами).

Ответ: $8,98846567431157 * 10^{307}$

28. *Записать внутреннее представление числа 250,1875 в форме с плавающей точкой.*

Решение.

1. Переведем его в двоичную систему счисления с 24 значащими цифрами:

    $250,1875_{10} = 11111010,0011000000000000_2$

2. Запишем в форме нормализованного двоичного числа с плавающей точкой:

    $0,111110100011000000000000\times10_2^{1000}$.

Здесь мантисса, основание системы счисления ($2_{10} = 10_2$) и порядок ($8_{10} = 1000_2$) записаны в двоичной системе.

3. Вычислим машинный порядок в двоичной системе счисления: $Mp_2 = p_2 + 100\ 0000_2$.

$Mp_2 = 1000 + 100\ 0000 = 100\ 1000$.

4. Запишем представление числа в 4-х байтовой ячейке памяти с учетом знака числа:

0	1001000	11111010	00110000	00000000
31	24	23		0

Шестнадцатеричная форма: 48FA3000.

Ответ: внутреннее представление числа *250,1875 равно*
01001000 11111010 00110000 00000000
Шестнадцатеричная форма: 48FA3000.

29. *По шестнадцатеричной форме внутреннего представления числа в форме с плавающей точкой С9811000 восстановить само число.*

Решение.

1. Перейдем к двоичному представлению числа в 4-х байтовой ячейке, заменив каждую шестнадцатеричную цифру 4-мя двоичными цифрами:

1100 1001 1000 0001 0001 0000 0000 0000

1	100 1001	1000	0001	0000 0000

31 Mp_2 23 0

2. Заметим, что получен код отрицательного числа, поскольку в старшем разряде с номером 31 записана 1. Получим порядок числа из уравнения:

$Mp_2 = p_2 + 100\ 0000_2$;

$p_2 = 1001001_2 - 100\ 0000_2 = 1001_2 = 9_{10}$.

3. Запишем в форме нормализованного двоичного числа с плавающей точкой с учетом знака числа: $-0{,}1000\ 0001\ 0001\ 0000\ 0000\ 0000 \times 2^{1001}$.
4. Число в двоичной системе счисления имеет вид: $-100000010{,}001_2$.
5. Переведем число в десятичную систему счисления:

$-100000010{,}001_2 = -(1 \times 2^8 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{-3}) = -258{,}125_{10}$.

30. *Для представления вещественного числа отводится 2 байта. Порядок занимает 7 бит. Сколько различных вещественных чисел точно представимы в памяти такого компьютера?*

Решение:

1. Используем формулу для вычисления количества вещественных чисел, точно представимых в памяти компьютера: $N = 2^t \times (U - L + 1) + 1$.

Здесь

t – количество двоичных разрядов мантиссы;

U – максимальное значение математического порядка;

L – минимальное значение порядка.

t = 9 (16 разрядов всего, 7-машинный порядок, 16–7=9)

2. Так как машинный порядок 7 бит, 1 разряд на знак порядка, 6 бит на число порядка. Машинный порядок изменяется в диапазоне от 0 до 63 (всего значений $2^6 = 64$). Минимальное значение порядка L= –32, максимальное значение порядка U = 31.
3. Подставляем найденные значения в формулу:

$N = 2^t \times (U - L + 1) + 1$.

$N = 2^9 \times (31 + 32 + 1) + 1 = 512 \times 64 + 1 = 32769$

Ответ: 32769

31. *Минимальное значение математического порядка в десятичной системе счисления равно (–1024). Чему равно смещение?*

Решение:

Машинный порядок смещен относительно математического и имеет только положительные значения. Смещение выбирается так, чтобы минимальному математическому значению порядка соответствовал нуль.

Связь между машинным порядком (Mp) и математическим (p) в рассматриваемом случае выражается формулой:

Mp = p + 64, где 64 – смещение для представления в 64-байтовой ячейке памяти.

Если представить это на шкале, то имеем:
$-64 \longleftarrow 0 \longrightarrow 63$

В данной задаче минимальное значение математического порядка в десятичной системе счисления равно (–1024).
На шкале это можно представить так:
$-1024 \longleftarrow 0 \longrightarrow 1023$
Легко видеть, смещение равно 1024.

Ответ: 1024.

32. *Получить шестнадцатеричную форму внутреннего представления отрицательного числа –123,125 в формате с плавающей точкой в 4-х байтовой ячейке.*
Решение:

Используем алгоритм записи внутреннего представления вещественного числа:

1. Переведем модуль числа в двоичную систему счисления с 24 значащими цифрами.
$123_{10} = 1111011_2$ $\quad$ $0,125_{10} = 0,001_2$
$123,125_{10} = 1111011,00100000000000000_2$ (4 байта – 32 разряда, 1 байт на знак и порядок, 3 байта или 24 бита на мантиссу)
2. Запишем в форме нормализованного двоичного числа с плавающей запятой:
$0,111101100100000000000000 \times 10_2^{111}$ $\quad$ $(111_2 = 7^{10})$
3. Вычислим машинный порядок в двоичной системе счисления.
$Mp_2 = p_2 + 100\,0000_2 = 111_2 + 100\,0000_2 = 1000111_2$
4. Запишем представление числа в 4-х байтовой ячейке памяти с учетом знака числа:

1	1000111	1111 0110	0100 0000	0000 0000
31	24 Mp_2	23		0

Шестнадцатеричная форма: –47F64000.
Ответ: –47F64000

№ 33. *Для представления вещественного числа используется 2-х байтовая ячейка памяти. В 1-ом байте содержится знак числа и порядок, во 2-ом байте — мантисса. Определить минимальное и максимальное по абсолютной величине числа, точно представимые в таком компьютере.*

№ 34 *В «игрушечном» компьютере для представления вещественных чисел используется однобайтовая ячейка памяти (биты нумеруются от 0 до 7 справа налево). 7-й бит – знак числа; 5 и 6 биты – машинный порядок; 4 – 0 биты – мантисса. Определить:*

1) количество точно представимых вещественных чисел;

2) 7 наименьших десятичных чисел, представимых точно в таком компьютере.

№ 35 *Говорят, что число, превышающее максимальное значение, представимое в компьютере, вызывает переполнение. Определить для «игрушечного» компьютера, какие из следующих чисел вызовут переполнение: 0,5; 10,0; 4,3; 8,1; 7,8.*

№ 36 *«Игрушечный» компьютер сохраняет значение числа, не вызывающего переполнение и не представленного точно, в виде ближайшего снизу (по абсолютной величине) точно представимого числа. Какие значения примут следующие числа в таком компьютере: 1,25; 1,6; 1,9?*

№ 37 *Увидит ли разницу «игрушечный» компьютер между следующими парами чисел:*

1) 1,4 и 1,5; 2) 1,6 и 1,62; 3) 1,8 и 1,9?

3.Арифметические операции с числами в формате с плавающей запятой

Методические рекомендации:

При решении задач учащиеся используют:

- Алгоритм сложения и вычитания чисел в формате с плавающей запятой:
  1. Провести выравнивание порядков
  2. Сложить или вычесть мантиссы.
  3. Привести полученное число к стандартному формату с плавающей запятой путем нормализации.

Процедура выравнивания порядков: порядок меньшего (по модулю) числа увеличивается до величины порядка большего (по модулю) числа. Чтобы величина числа не изменилась, мантисса уменьшается в такое же количество раз (сдвигается в ячейке памяти вправо на количество разрядов, равное разности порядков чисел).

Процедура нормализации: сдвиг мантиссы влево или вправо так, чтобы ее первая значащая цифра попала в первый разряд после запятой.

- Алгоритм умножения чисел в формате с плавающей запятой:
  1. Сложить порядки
  2. Перемножить мантиссы

- Алгоритм деления чисел в формате с плавающей запятой:
  1. Из порядка делимого вычесть порядок делителя
  2. Мантиссу делимого делить на мантиссу делителя.

Задачи. Уровень «3»

37. *Произвести сложение чисел $0{,}1\times2^3$ и $0{,}1\times2^5$ в формате с плавающей запятой.*

Решение:

Произведем выравнивание порядков и сложение мантисс:

$0{,}1\times2^{3} = X\times2^5$, $X=(0{,}1\times2^3)/2^5=0{,}1\times2^{-2}=0{,}001$

$$\begin{array}{r} 0{,}001\times2^5 \\ {}^{+}0{,}100\times2^5 \\ \hline 0{,}101\times2^5 \end{array}$$

Ответ: $0{,}101\times2^5$

38. *Произвести умножение чисел $0{,}1\times2^3$ и $0{,}1\times2^5$ в формате с плавающей запятой.*

Решение:

После умножения будет получено число $0{,}01\times2^8$, которое после нормализации примет вид $0{,}1\times2^7$.

Ответ: $0{,}1\times2^7$.

Задачи. Уровень «4»

39. *Произвести сложение, вычитание, умножение и деление чисел $0{,}1\times2^{2}$ и $0{,}1\times2^{-2}$ в формате с плавающей запятой.*

Решение:

Произведем выравнивание порядков и сложение мантисс:

$0{,}1\times2^{-2} = X \times 2^{2}$, $\quad X = (0{,}1\times2^{-2})/\,2^{2} = 0{,}1\times2^{-4} = 0{,}00001$

$$
\begin{array}{r}
0{,}10000\times2^{2}\\
+\;0{,}00001\times2^{2}\\
\hline
0{,}10001\times2^{5}
\end{array}
$$

Произведем вычитание мантисс и процедуру нормализации:

$$
\begin{array}{l}
\;\;0{,}10000\times2^{2}\\
-\;0{,}00001\times2^{2}\\
\hline
0{,}01111\times2^{2} = 0{,}1111\times2^{1}
\end{array}
$$

Используем алгоритм умножения: сложим порядки и перемножим мантиссы.

$$
\begin{array}{l}
\;\;0{,}10000\times2^{2}\\
\times\;0{,}00001\times2^{2}\\
\hline
0{,}000001\times2^{4}\text{, нормализуем ответ } 0{,}1\times2^{\times1}
\end{array}
$$

Используем алгоритм деления чисел в формате с плавающей запятой: из порядка делимого вычесть порядок делителя, мантиссу делимого делить на мантиссу делителя.

$$
\begin{array}{l}
\;\;0{,}10000\times2^{2}\\
:\;0{,}00001\times2^{2}\\
\hline
10\,000\times2^{0}\text{, нормализуем ответ } 0{,}1\times2^{5}
\end{array}
$$

Ответ: $0{,}10001\times2^{5}$; $\quad 0{,}1111\times2^{1}$; $\quad 0{,}1\times2^{-1}$; $\quad 0{,}1\times2^{5}$.